CSM - Exercício: projeto de sistemas de controle no espaço de estados.

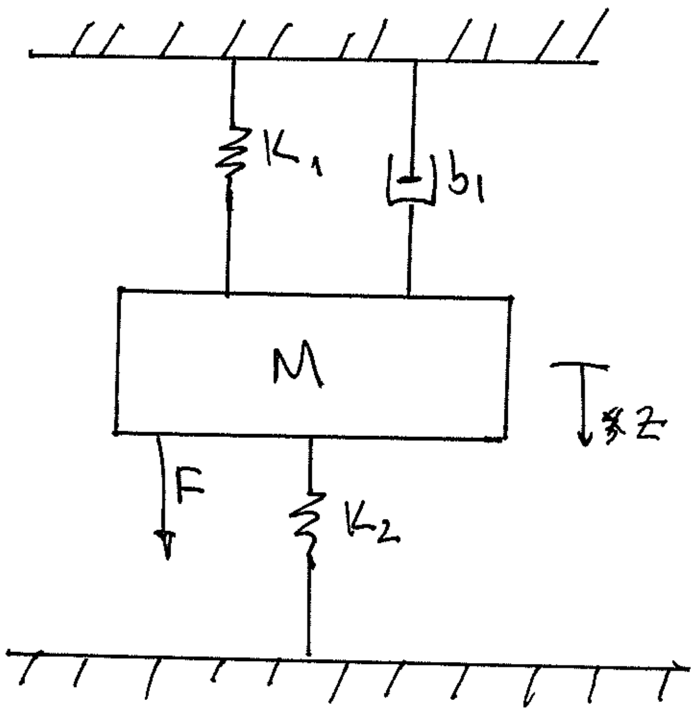
Seja o sistema abaixo, faça

A - o modelo no espaço de estados; [saída: posição da massa]

B - projeto de um regulador para $\xi = 0{,}6$; $t_s = 5s$

C - projeto de um servossistema, com os mesmos requisitos

D - projeto de um observador de estado, de modo que a dinâmica dominante seja a especificada



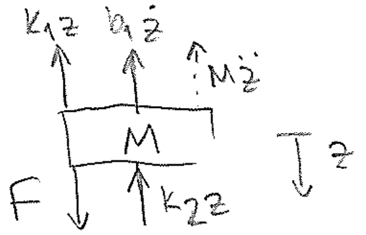
$K_1 = 1$ N/m

$K_2 = 2$ N/m

$b_1 = 0{,}1$ Ns/m

$M = 10$ kg.

A)



$$\sum F_i = 0 \Rightarrow F - K_2 z - K_1 z - b_1 \dot{z} - M\ddot{z} = 0$$

$$\ddot{z} = -\frac{(K_1+K_2)}{M} z - \frac{b_1}{M}\dot{z} + \frac{1}{M}F$$

$$x = \begin{bmatrix} z \\ \dot{z} \end{bmatrix} ; \; u = F \; ; \; y = z$$

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{z} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{(K_1+K_2)}{M} & -\frac{b_1}{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ \dot{z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/M \end{bmatrix} F$$

$$\begin{bmatrix} z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ \dot{z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} F$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{(K_1+K_2)}{M} & -\frac{b_1}{M} \end{bmatrix} ; \; B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/M \end{bmatrix} ; \; C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} ; \; D = 0$$

AUTOVALORES EM M.A

$$|\lambda I - A| = 0$$

$$\begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ \frac{K_1+K_2}{M} & \lambda + \frac{b_1}{M} \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 + \lambda \frac{b_1}{M} + \frac{K_1+K_2}{M} = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\frac{b_1}{M} \pm \sqrt{\frac{b_1^2}{M^2} - 4\frac{(K_1+K_2)}{M}}}{2}$$

$$= -0{,}005 \pm j\,0{,}548 \rightarrow \begin{cases} \omega_n = 5{,}48 \cdot 10^{-1} \\ \xi = 9{,}13 \cdot 10^{-3} \end{cases}$$

$\Rightarrow t_s = 800$!

VALORES NUMÉRICOS: $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0{,}3 & -0{,}01 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0{,}1 \end{bmatrix}$; $C = [1 \quad 0]$; $D = 0$

B - $\xi = 0{,}6$; $t_s = 5s$

Com estes valores, definimos os pólos dominantes que devemos projetar nosso regulador/ controlador. Dado que o sistema seja controlável, é possível alocar os pólos de forma arbitrária

$$W_c = [B \quad AB] = \begin{bmatrix} 0 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & -0{,}001 \end{bmatrix}$$

$$\det W_c = -10^{-2} \neq 0$$ ✓ sistema controlável

PÓLOS DESEJADOS:

$$t_s = \frac{4}{\xi \omega_n} = 5 \rightarrow \omega_n = \frac{4}{5\xi} = 1{,}33$$

$$\mu_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$$

$$= -0{,}8 \pm j\, 1{,}0667$$

MÉTODO 1: SUBSTITUIÇÃO DIRETA

$$u = -Kx$$

$$\dot{x} = Ax + Bu = Ax - BKx$$
$$= (A - BK)x = \tilde{A}x$$

$$\tilde{A} = (A - BK) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0{,}3 & -0{,}01 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0{,}1 \end{bmatrix} [K_1 \quad K_2]$$

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0{,}3 - 0{,}1K_1 & -0{,}01 - 0{,}1K_2 \end{bmatrix}$$

$$|sI - \tilde{A}| = \begin{vmatrix} s & -1 \\ 0{,}3+0{,}1K_1 & s+0{,}01+0{,}1K_2 \end{vmatrix} = 0$$

$$= s^2 + (0{,}01+0{,}1K_2)s + (0{,}3+0{,}1K_1) = 0$$

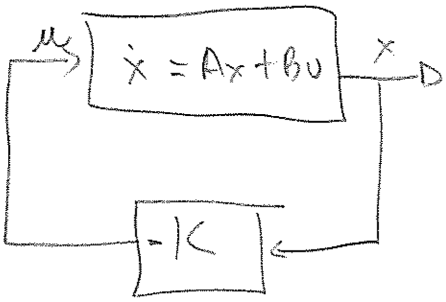
EQ. CARACTERÍSTICA DESEJADA

$$s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2 =$$

$$= s^2 + 1{,}6s + 1{,}7778$$

$$\begin{cases} 0{,}01 + 0{,}1K_2 = 1{,}6 \\ 0{,}3 + 0{,}1K_1 = 1{,}778 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K_1 = 14{,}7778 \\ K_2 = 15{,}9 \end{cases}$$

$$K = [14{,}7778 \quad 15{,}9]$$



← pólos p/ $\xi = 0{,}6$, $t_s = 5\,s$

MÉTODO 2: FÓRMULA DE ACKERMANN:

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} W_c^{-1} \phi(A)$$

$$\phi(A) = A^2 + 2\xi\omega_n A + \omega_n^2 I$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0{,}3 & -0{,}01 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0{,}3 & -0{,}01 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}3 & -0{,}01 \\ 0{,}003 & -0{,}2999 \end{bmatrix}$$

$$2\xi\omega_n A = 1{,}6 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0{,}3 & -0{,}01 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1{,}6 \\ -0{,}48 & -0{,}016 \end{bmatrix}$$

$$\omega_n^2 I = \begin{bmatrix} 1{,}778 & 0 \\ 0 & 1{,}778 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad \phi(A) = \begin{bmatrix} 1{,}4778 & 1{,}59 \\ -0{,}4770 & 1{,}4619 \end{bmatrix}$$

$$W_c^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & -0{,}001 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0{,}1 & 10 \\ 10 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}1 & 10 \\ 10 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1{,}4778 & 1{,}59 \\ -0{,}4770 & 1{,}4619 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4{,}622 & 14{,}7778 \\ 14{,}7778 & 15{,}9 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} 14{,}7778 & 15{,}9 \end{bmatrix}$$

MÉTODO 3: FORMA CONTROLÁVEL:

$$F - K_2 z - K_1 z - b_1 \dot{z} - M\ddot{z} = 0$$

$$F - 3z - 0{,}1\dot{z} - 10\ddot{z} = 0$$

$$F(s) - 3Z(s) - 0{,}1sZ(s) - 10s^2 Z(s) = 0$$

$$\frac{Z(s)}{F(s)} = \frac{1}{10s^2 + 0{,}1s + 3}$$

$$= \frac{0{,}1}{s^2 + 0{,}01s + 0{,}3}$$

$K = K_c \cdot T^{-1}$

onde

$T = W_c \cdot M$

$M = \begin{bmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$K_c = [\alpha_2 - a_2 \quad \alpha_1 - a_1]$

$\underbrace{\alpha(\mu) = s^2 + \alpha_1 s + \alpha_2}_{\text{desejado}}$

$$a_1 = 0{,}01 \quad ; \quad a_2 = 0{,}3$$

$$M = \begin{bmatrix} 0{,}01 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$T = W_c M = \begin{bmatrix} 0 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & -0{,}001 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}01 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0{,}1 & 0 \\ 0 & 0{,}1 \end{bmatrix} \therefore T^{-1} = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\alpha(\mu) = s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2$$
$$= s^2 + 1{,}6s + 1{,}778$$

$\alpha_1 = 1{,}6$
$\alpha_2 = 1{,}778$

$$K_c = [1{,}778 - 0{,}3 \quad 1{,}6 - 0{,}01]$$
$$= [1{,}478 \quad 1{,}59]$$

$$K = K_c \cdot T^{-1} = [14{,}78 \quad 15{,}9]$$

C- PROJETO DO SERVOSSISTEMA

MÉTODO 1: AJUSTE DO GANHO ($\bar{N}$)

$$\bar{N} = \frac{1}{(C-DK)(BK-A)^{-1}B + D}$$

$$(C-DK) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(BK-A)^{-1} = \left[\begin{bmatrix} 0 \\ 0,1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 14,778 & 15,9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0,3 & -0,01 \end{bmatrix} \right]^{-1}$$

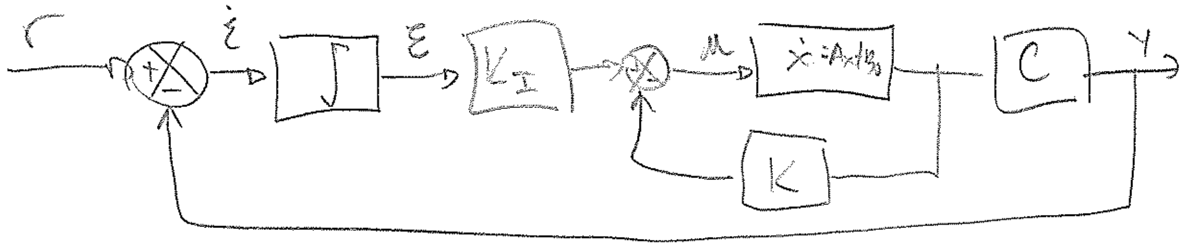
$$= \left[\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1,4778 & 1,59 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0,3 & -0,01 \end{bmatrix} \right]^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1,7778 & 1,6 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 0,9 & 0,5625 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(BK-A)^{-1} B = \begin{bmatrix} 0,9 & 0,5625 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0,1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,05625 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{N} = \frac{1}{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,05625 \\ 0 \end{bmatrix} + 0} = \frac{1}{0,05625} = 17,778$$

MÉTODO 2: INTEGRADOR NO RAMO DE M.A.:



1. $$M_c = \begin{bmatrix} A & B \\ -C & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -0,3 & -0,01 & 0,1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det M_c = -0,1 \quad \checkmark \quad \text{OK!}$$

2. $$\mu_{1,2} = -0,8 \pm j1,0667$$
$$\mu_3 = -10$$

Eq característica. $(s+10)(s^2+1,6s+1,7778) =$
$s^3 + 11,6s^2 + 17,7778s + 17,778$

Alocar os pólos para $\hat{A}, \hat{B}$, onde $\hat{K} = [K_1 \;\; K_2 \;\; -K_I]$

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{B} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A} = \hat{A} - \hat{B}\hat{K} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -0,3 & -0,01 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0,1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_1 & K_2 & -K_I \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -0,3 & -0,01 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0,1K_1 & 0,1K_2 & -0,1K_I \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -0,3-0,1K_1 & -0,01-0,1K_2 & 0,1K_I \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$|sI - \tilde{A}| = \begin{vmatrix} s & -1 & 0 \\ 0,3+0,1K_1 & s+0,01+0,1K_2 & -0,1K_I \\ 1 & 0 & s \end{vmatrix}$$

$$|sI - \tilde{A}| = s^2(s + 0{,}01 + 0{,}1K_2) + 0{,}1K_I + s(0{,}3 + 0{,}1K_1)$$

$$= s^3 + (0{,}01 + 0{,}1K_2)s^2 + 0{,}1K_I + (0{,}3 + 0{,}1K_1)s$$

$$= s^3 + 11{,}6s^2 + 17{,}7778\,s + 17{,}778$$

$$\begin{cases} 0{,}01 + 0{,}1K_2 = 11{,}6 \\ 0{,}3 + 0{,}1K_1 = 17{,}7778 \\ 0{,}1K_I = 17{,}778 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K_1 = 174{,}778 \\ K_2 = 115{,}9 \\ K_I = 177{,}78 \end{cases}$$

$$\boxed{K = [174{,}78 \quad 115{,}9] \quad ; \quad K_I = 177{,}78}$$

D- PROJETO DOS OBSERVADORES DE ESTADO

OBSERVABILIDADE DO SISTEMA.

$$W_0 = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [1 \quad 0] \\ [1 \quad 0]\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0{,}3 & -0{,}01 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \det W_0 = 1 \quad \checkmark \text{ OK, observável!}$$

DEFINIMOS OS PÓLOS DO OBSERVADOR EM -10 (MÚLTIPLOS)

POLINÔMIO CARACTERÍSTICO DO OBSERVADOR.

$$(s+10)^2 = s^2 + 20 + 100$$

ALOCAR OS PÓLOS DO SISTEMA

$$\tilde{A} = A - K_e C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0{,}3 & -0{,}01 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \end{bmatrix} [1 \quad 0]$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0{,}3 & -0{,}01 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} K_1 & 0 \\ K_2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -K_1 & 1 \\ -0{,}3-K_2 & -0{,}01 \end{bmatrix}$$

$$|sI - \tilde{A}| = \begin{vmatrix} s + k_1 & -1 \\ 0{,}3 + k_2 & s + 0{,}01 \end{vmatrix} = (s + k_1)(s + 0{,}01) + 0{,}3 + k_2 =$$

$$= s^2 + (0{,}01 + k_1)s + 0{,}01k_1 + k_2 + 0{,}3 = s^2 + 20s + 100$$

$$\begin{cases} 0{,}01 + k_1 = 20 \\ 0{,}01k_1 + k_2 + 0{,}3 = 100 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_1 = 19{,}99 \\ k_2 = 99{,}5001 \end{cases}$$

$$K_e = \begin{bmatrix} 19{,}99 \\ 99{,}5001 \end{bmatrix}$$

//

FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA DO REGULADOR / OBSERVADOR (CASO 1 : $\bar{N}$)

$$\frac{U(s)}{-Y(s)} = K(sI - A + K_eC + BK)^{-1}K_e = G_c(s)$$

RESOLVEREMOS ESTA EXPRESSÃO MATRICIAL POR PARTES:

$$[\underbrace{sI - A}_{} + K_eC + BK] =$$

$$\begin{bmatrix} s & -1 \\ 0{,}3 & s + 0{,}01 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 19{,}99 \\ 99{,}5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0{,}1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 14{,}78 & 15{,}9 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} s & -1 \\ 0{,}3 & s + 0{,}01 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 19{,}99 & 0 \\ 99{,}5 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1{,}478 & 1{,}59 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s + 19{,}99 & - \\ 101{,}3 & s + 1{,}\ldots \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} s+19{,}99 & -1 \\ 101{,}3 & s+1{,}6 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\underbrace{(s+19{,}99)(s+1{,}6)+101{,}3}_{=p}} \begin{bmatrix} s+1{,}6 & 1 \\ -101{,}3 & s+19{,}99 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{s+1{,}6}{p} & \frac{1}{p} \\ \frac{-101{,}3}{p} & \frac{s+19{,}99}{p} \end{bmatrix}$$

$$p = s^2 + 1{,}6s + 19{,}99s + 31{,}984 + 101{,}3$$
$$= s^2 + 21{,}59s + 133{,}284$$

$$G_c(s) = \begin{bmatrix} 14{,}78 & 15{,}9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{s+1{,}6}{p} & \frac{1}{p} \\ \frac{-101{,}3}{p} & \frac{s+19{,}99}{p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 19{,}99 \\ 99{,}5 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 14{,}78 & 15{,}9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{19{,}99(s+1{,}6)+99{,}5}{p} \\ \frac{99{,}5(s+19{,}99)-101{,}3 \cdot 19{,}99}{p} \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{14{,}78\left[19{,}99(s+1{,}6)+99{,}5\right] + 15{,}9\left[99{,}5(s+19{,}99)-101{,}3 \cdot 19{,}99\right]}{p}$$

$$= \frac{295{,}4522s + 1943{,}33352 + 1582{,}05s - 572{,}1138}{p}$$

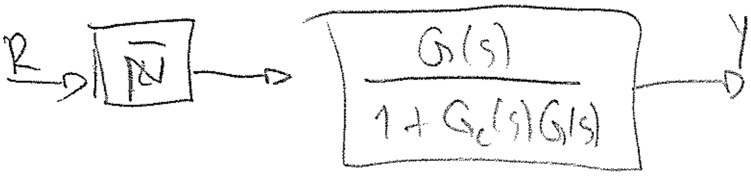
$$= \frac{1877{,}5s + 1371{,}2}{s^2 + 21{,}59s + 133{,}284} \quad //$$

$\downarrow$

pólos $-10{,}8 \pm j4{,}1$ ✓ ok!

(pólos do cont./obs estáveis!) 11

DEFINIÇÃO DE $\bar{N}$ PARA O REGULADOR/OBSERVADOR:



$$G(s) = \frac{Z(s)}{F(s)}$$

$$F(s) - (K_1+K_2)Z(s) - s b_1 Z(s) - s^2 M Z(s) = 0$$

$$F(s) = \left[Ms^2 + b_1 s + (K_1+K_2)\right] Z(s)$$

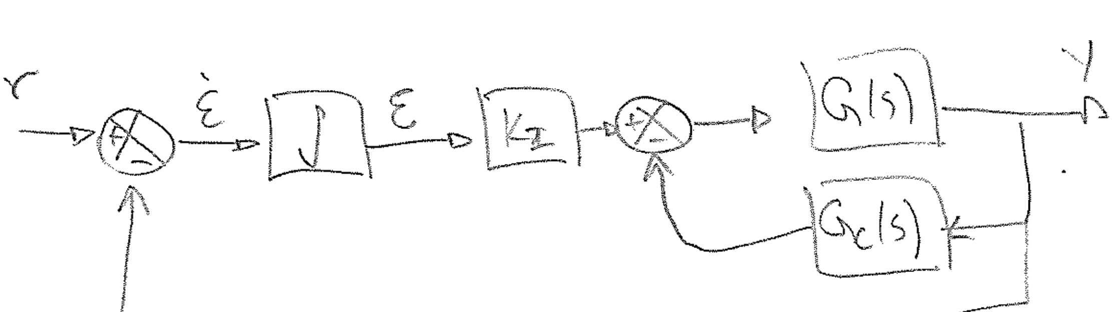
$$G(s) = \frac{1}{Ms^2 + b_1 s + K_1 + K_2} = \frac{1}{10s^2 + 0{,}1s + 3} \quad //$$

$$\bar{N} = \frac{1 + G_c(0)\,G(0)}{G(0)}$$

p/ ganho = 1 em malha fechada

$$\bar{N} = \frac{1 + \frac{1371{,}2}{133{,}3} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{3}} = 13{,}29 \quad //$$

FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA DO REGULADOR/OBSERVADOR (CASO 2: INTEGRADOR NO RAMO DE M.A):



$$G_c(s) = K(sI - A + K_eC + BK)^{-1} K_e$$

onde $K = [174{,}78 \quad 115{,}9]$, $K_e = \begin{bmatrix} 19{,}99 \\ 99{,}5001 \end{bmatrix}$

ver projeto de servosistemas com integrador p. 9

ver projeto de observadores p. 10

FAREMOS A MULTIPLICAÇÃO POR PARTES...

$$[sI - A + K_eC + BK] = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 0{,}3 & s+0{,}01 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 19{,}99 & 0 \\ 99{,}5 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 17{,}478 & 11{,}59 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} s+19{,}99 & -1 \\ 117{,}278 & s+11{,}6 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{inversa}} \frac{1}{\underbrace{(s+19{,}99)(s+11{,}6)+117{,}278}_{p}} \begin{bmatrix} s+11{,}6 & 1 \\ -117{,}278 & s+19{,}99 \end{bmatrix}$$

onde

$$p = s^2 + 31{,}59s + 349{,}162$$

ENTÃO:

$$G_c(s) = [174{,}78 \quad 115{,}9] \begin{bmatrix} \frac{s+11{,}6}{p} & \frac{1}{p} \\ -\frac{117{,}278}{p} & \frac{s+19{,}99}{p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 19{,}99 \\ 99{,}5001 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{15026(s+1{,}113)}{s^2 + 31{,}59s + 349{,}2} \quad //$$

$\hookrightarrow$ pólos $\{ -15{,}8 \pm j\,9{,}98$ OK!

Reg/obs estável

→ IMPORTANTE:

OS PROJETOS SEMPRE DEVEM SER AVERIGUADOS POR SIMULAÇÃO ANTES DE IMPLEMENTADOS.

NO CASO DO REG/CONT COM INTEGRADOR,

OS PÓLOS NÃO SÃO RÁPIDOS O SUFICIENTE E AFETAM O COMPORTAMENTO DO SISTEMA DINÂMICO.

ASSIM, É PRECISO DISTANCIAR AINDA MAIS OS PÓLOS DO OBSERVADOR DOS PÓLOS DOMINANTES DE MF.

NOTE QUE ESTE É UM PROCESSO ITERATIVO E PODE REQUERER MUDANÇAS NOS

- PÓLOS DO OBSERVADOR
- " " REGULADOR

DE MODO A OBTER UM COMPROMISSO ENTRE

- TEMPO DE RESPOSTA
- SENSIBILIDADE A RUÍDOS.

LEVANDO-SE EM CONTA AS SATURAÇÕES DOS ATUADORES.

POR ESTES MOTIVOS, A UTILIZAÇÃO DE COMPUTADORES É IMPORTANTE NA DEFINIÇÃO DAS LEIS DE CONTROLE.